Teorema Faktor

Teorema faktor adalah salah satu teorema pada submateri polynomial. Teorema ini cukup terkenal dan sangat berguna untuk menyelesaikan soal - soal baik level sekolah maupun soal level olimpiade. Berikut bunyi dari teorema faktor tersebut :

Misalkan $P(x)$ suatu polynomial, $(x-k)$ merupakan faktor dari $P(x)$ jika dan hanya jika $P(k)=0$

Selanjutnya jika diketahui $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ adalah akar -akar dari polynomial $P(x)$ berderajat n maka diperoleh,

$$P(x) = A(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\cdots(x-a_n)$$

Berikut beberapa soal yang berkaitan dengan teorema faktor di atas.

1. Polinom $P(x)$ dibagi oleh x^2+x+1 menghasilkan hasil bagi $H(x)$ dan sisa $x-7$. Jika $H(x)$ dibagi $(x-1)$ menghasilkan sisa 2, tunjukkan bahwa $(x-1)$ adalah faktor dari $P(x)$.
   Penyelesaian :
   Berdasarkan keterangan pada soal diperoleh $P(x) = (x^2+x+1)H(x)+x-7$ dan $H(1)=2$. Untuk menunjukkan $(x-1)$ adalah faktor dari $P(x)$ cukup ditunjukkan bahwa $P(1)=0$. Untuk keperluan itu, perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} P(1) &= 3H(1)+1-7 \\ &= 3\cdot 2-6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Jadi, terbukti bahwa $(x-1)$ adalah faktor dari $P(x)$.

2. Tentukan nilai m dan n agar polinom $P(x) = x^3+mx^2-nx-3m$ dan $Q(x) = x^3+(m-2)x^2-nx-3n$ mempunyai faktor persekutuan derajat dua.
   Penyelesaian :
   Dari bentuk polinom $P(x)$ dan $Q(x)$ maka misalkan faktor persekutuan derajat dua yang dimaksud adalah (x^2+px-3). Dengan demikian kita peroleh,

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2+px-3)(x+m) \\ &= x^3+(p+m)x^2+(pm-3)x-3m \end{aligned}$$

   sehingga didapat $p+m=m \quad \Leftrightarrow \quad p=0$. Karena $p=0$ maka $n=3$. Dari sini diperoleh faktor persekutuan yang dimaksud adalah (x^2-3) dan diperoleh pula $Q(x) = x^3+(m-2)x^2-3x-9$. Yang selanjutnya didapat

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x^3-3)(x+3) \\ &= x^3+3x^2-3x-9 \end{aligned}$$

   sehingga, $m-2=3 \quad \Leftrightarrow \quad m=5$.
   Jadi, $m=5$ dan $n=3$.

3. Tentukan nilai a dan b agar $(x^4-7x^3+ax^2+bx-16)$ mempunyai faktor $(x-2)^2$.
   Penyelesaian :

Karena $(x-2)^2$ adalah faktor dari $(x^4-7x^3+ax^2+bx-16)$ maka diperoleh

$$\begin{aligned} x^4-7x^3+ax^2+bx-16 &= (x-2)^2(x^2+px-4) \\ &= (x^2-4x+4)(x^2+px-4) \\ &= x^4+(p-4)x^3-4px^2+(4p-16)x-16 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh,

$$\begin{aligned} p-4=-7 \quad &\Leftrightarrow \quad p=-3 \\ a &= -4p = 12 \\ b &= 4p-16 = -12-16 = -28 \end{aligned}$$

4. Jika $f(x)=x^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$ dan $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=1$. Berapakah nila $f(6)$. *(Penyisihan Brilliant Competition II)*
Penyelesaian :
Misalkan $P(x)=f(x)-1$, maka $P(1)=P(2)=P(3)=P(4)=P(5)=0$. Oleh karena itu, $1,2,3,4,5$ adalah akar - akar dari $P(x)$ sehingga

$$P(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)$$

Jadi,

$$\begin{aligned} f(6) &= P(6)+1 \\ &= (6-1)(6-2)(6-3)(6-4)(6-5)+1 \\ &= 121 \end{aligned}$$

5. Misalkan $f(x)$ adalah polinom derajat empat. Jika $f(1)=f(2)=f(3)=0, f(4)=6$ dan $f(5)=72$. Tentukanlah digit terakhir dari nilai $f(2010)$. *(IWYMIC 2010)*
Penyelesaian :
Karena $f(1)=f(2)=f(3)=0$ maka $f(x)=(ax-b)(x-1)(x-2)(x-3)$. Selanjutnya dengan mensubstitusikan nilai $f(4)=6$ dan $f(5)=72$ berturut - turut didapat persamaan $4a-b=1$ dan $5a-b=3$. Kedua persamaan linier ini memiliki penyelesaian yaitu $a=2$ dan $b=7$. Oleh karena itu diperoleh polinom $f(x)$ yaitu

$$f(x)=(2x-7)(x-1)(x-2)(x-3)$$

sehingga

$$\begin{aligned} f(2010) &= (4020-7)(2010-1)(2010-2)(2010-3) \\ &= 4013\cdot 2009\cdot 2008\cdot 2007 \\ &\equiv 3\cdot 9\cdot 8\cdot 7 \mod 10 \\ &\equiv 2 \mod 10 \end{aligned}$$

Jadi, digit terakhir dari nilai $f(2010)$ adalah 2.

6. Diberikan polinom $P(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ dengan a,b,c,d konstanta. Jika $P(1)=10, P(2)=20$ dan $P(3)=30$ maka nilai dari

$$\frac{P(12)+P(-8)}{10}$$

adalah ... *(OSP SMA 2010)*

Penyelesaian :

Misalkan $Q(x) = P(x) - 10x$ maka $Q(1) = Q(2) = Q(3) = 0$ sehingga

$$Q(x) = (x - k)(x - 1)(x - 2)(x - 3)$$

oleh karena itu,

$$P(x) = (x - k)(x - 1)(x - 2)(x - 3) + 10x$$

Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} P(12) &= (12 - k)(12 - 1)(12 - 2)(12 - 3) + 120 \\ &= 990(12 - k) + 120 \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} P(-8) &= (-8 - k)(-8 - 1)(-8 - 2)(-8 - 3) - 80 \\ &= 990(8 + k) - 80 \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} \frac{P(12) + P(-8)}{10} &= \frac{990(12 - k) + 120 + 990(8 + k) - 80}{10} \\ &= \frac{19840}{10} \\ &= 1984 \end{aligned}$$

7. Misalkan $f(x)$ adalah polinomial berderajat 2010 sedemikian sehingga $f(k) = -\frac{2}{k}$ untuk setiap $k = 1, 2, 3, \cdots, 2010, 2011$. Tentukan nilai dari $f(2012)$. *(IWYMIC 2011)*

Penyelesaian :

Misal $P(x) = xf(x) + 2$, jelas bahwa $P(x)$ adalah polinom derajat 2011 dan $P(1) = P(2) = P(3) = \cdots = P(2011) = 0$, sehingga

$$P(x) = A(x - 1)(x - 2)(x - 3)\cdots(x - 2011)$$

Substitusikan nilai $x = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned} 2 = P(0) &= A(-1)(-2)(-3)\cdots(-2011) \\ 2 &= -2011!A \\ A &= -\frac{2}{2011!} \end{aligned}$$

Oleh karena itu,

$$\begin{aligned} 2012f(2012) + 2 &= -\frac{2}{2011!}(2012 - 1)(2012 - 2)(2012 - 3)\cdots(2012 - 2011) \\ &= -\frac{2}{2011!} \cdot 2011! \\ &= -2 \end{aligned}$$

Jadi, $f(2012) = -\frac{4}{2012} = -\frac{1}{503}$

8. Diketahui polinom $P(x)$ berderajat n sedemikian sehingga $P(k) = \frac{k}{k+1}$ untuk $k =$

$0, 1, 2, 3 \cdots, n$. Tentukanlah nilai dari $P(n+1)$. *(USAMO 1975)*

Penyelesaian :

Misal $Q(x) = (x+1)P(x) - x$, maka $Q(x)$ adalah polinom derajat $n+1$ dengan $Q(0) = Q(1) = Q(2) = \cdots = Q(n) = 0$ sehingga

$$Q(x) = Ax(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$$

dengan mensubstitusikan nilai $x = -1$ diperoleh

$$1 = Q(-1) = -A(-2)(-3)\cdots(-1-n) = A \cdot (-1)^{n+1}(n+1)!$$

sehingga diperoleh $A = \dfrac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Oleh karena itu untuk $x = n+1$ dipeoleh

$$\begin{aligned}(n+2)P(n+1) - (n+1) = Q(n+1) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}(n+1)n(n-1)(n-2)\cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 \\ &= (-1)^{n+1}\end{aligned}$$

Dari sini diperoleh,

- Jika n genap diperoleh $P(n+1) = \dfrac{n}{n+2}$
- Jika n ganjil diperoleh $P(n+1) = 1$

9. Misal a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$\frac{a_1}{k^2+1} + \frac{a_2}{k^2+2} + \frac{a_3}{k^2+3} + \frac{a_4}{k^2+4} + \frac{a_5}{k^2+5} = \frac{1}{k^2}$$

untuk $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Tentukanlah nilai dari $\dfrac{a_1}{37} + \dfrac{a_2}{38} + \dfrac{a_3}{39} + \dfrac{a_4}{40} + \dfrac{a_5}{41}$. *(APMO 2009)*

Penyelesaian :

Misalkan $P(x) = \dfrac{a_1}{x^2+1} + \dfrac{a_2}{x^2+2} + \dfrac{a_3}{x^2+3} + \dfrac{a_4}{x^2+4} + \dfrac{a_5}{x^2+5}$ maka dapat kita nyatakan $P(x) = \dfrac{Q(x)}{R(x)}$ dengan $R(x) = (x^2+1)(x^2+2)(x^2+3)(x^2+4)(x^2+5)$ dan $Q(x)$ adalah polinom berderajat delapan. Sehingga untuk $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ diperoleh $Q(k) = P(k)R(k) = \dfrac{R(k)}{k^2}$, dengan kata lain $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5$ adalah akar - akar dari polinom $x^2Q(x) - R(x)$. Oleh karena itu,

$$x^2Q(x) - R(x) = A(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$$

untuk $x = 0$ diperoleh

$$\begin{aligned}-R(0) &= -14400A \\ -120 &= -14400A \\ A &= \frac{1}{120}\end{aligned}$$

sehingga

$$x^2Q(x) - R(x) = \frac{1}{120}(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)$$

dengan membagi kedua ruas dengan $R(x)$ diperoleh

$$\begin{aligned}
x^2P(x) - 1 &= \frac{(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)(x^2-16)(x^2-25)}{120R(x)} \\
36 \cdot P(6) - 1 &= \frac{35 \cdot 32 \cdot 27 \cdot 20 \cdot 11}{120 \cdot 37 \cdot 38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41} \\
&= \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{13 \cdot 19 \cdot 37 \cdot 41} \\
&= \frac{231}{374699}
\end{aligned}$$

Jadi, $36P(6) = \dfrac{374930}{374699} \quad \Leftrightarrow \quad P(6) = \dfrac{187465}{6744582}$.
Oleh karena itu, $\dfrac{a_1}{37} + \dfrac{a_2}{38} + \dfrac{a_3}{39} + \dfrac{a_4}{40} + \dfrac{a_5}{41} = \dfrac{187465}{6744582}$

Disusun oleh : Tutur Widodo

Apabila ada saran, kritik maupun masukan
silakan kirim via email ke
tutur.w87@gmail.com

Terima kasih.

My blog : http://mathematic-room.blogspot.com